УДК 517.984

Спектральные и осцилляционные свойства одного линейного пучка дифференциальных операторов четвёртого порядка

Ж. Бен Амара, А. А. Владимиров, А. А. Шкаликов

Аннотация. Статья посвящается изучению спектральных и осцилляционных свойств линейного операторного пучка $A - \lambda B$, где коэффициент A отвечает дифференциальному выражению $(py'')''$, а коэффициент B — дифференциальному выражению $-y'' + cry$. В частности, устанавливается, что все отрицательные собственные значения пучка являются простыми, а число нулей отвечающих им собственных функций при некоторых дополнительных условиях связано с порядковым номером соответствующего собственного значения.

1. Введение

1.1. Рассмотрим спектральную задачу, отвечающую дифференциальному уравнению

$$(py'')'' - \lambda(-y'' + cry) = 0 \tag{1.1}$$

и какому-либо из наборов граничных условий

$$y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0 \tag{1.2}$$

или

$$y(0) = y'(0) = y'(1) = (py'')'(1) + \lambda\alpha y(1) = 0. \tag{1.3}$$

Коэффициенты $p, r \in C[0,1]$ предполагаются здесь равномерно положительными, а физические параметры c и α — вещественными. Решения y предполагаются удовлетворяющими, помимо сформулированных граничных условий, естественным ограничениям $y \in C^2[0,1]$ и $py'' \in C^2[0,1]$.

Граничные задачи указанного вида возникают, в частности, в теории упругости, описывая движение частично закреплённого стержня с сосредоточенной на свободном конце дополнительной массой. Случай $c \neq 0$ отвечает при этом наличию трения стержня о текущую жидкость — например, „течению“ стекла или пластика по твёрдой подложке (см. [**1**], [**2**]). Другие примеры механических приложений могут быть найдены в монографии [**3**]. В качестве гидродинамической интерпретации уравнения (1.1) может быть рассмотрено также хорошо известное одномерное уравнение Орра–Зоммерфельда без мнимого промежуточного члена (см., например, [**4**], [**5**], [**6**], [**2**]), возникающее в линеаризованной теории устойчивости течения вязкой несжимаемой жидкости под действием силы тяжести.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00423).

1.2. Граничные задачи, допускающие в операторной форме запись $Ay - \lambda By = 0$, где A и B суть регулярные дифференциальные операторы порядков, соответственно, n и m (при $n > m$), подвергались изучению, например, в работах [**7**], [**8**], [**5**] и [**9**]. Однако в перечисленных публикациях внимание было направлено на вопросы, связанные с полнотой систем собственных и присоединённых функций пучка $A - \lambda B$. В отличие от них, основной целью нашего исследования является изучение вопросов, связанных с простотой собственных значений рассматриваемой задачи, а также осцилляционными свойствами её собственных функций. В этом смысле настоящая статья примыкает к тематике работ [**10**]–[**14**]. Следует сразу отметить, что задача об изучении осцилляционных свойств собственных функций пучков дифференциальных операторов четвёртого порядка является существенно более сложной, чем аналогичная задача для операторов Штурма–Лиувилля.

Методологическую основу проводимого исследования составляют общие вариационные принципы для линейных пучков самосопряжённых операторов (см., например, [**15**]) и теория знакорегулярных операторов в пространствах непрерывных функций (см., например, [**10**], [**12**], [**16**], [**17**]). Основные результаты содержатся в пункте 3.

1.3. Введём в рассмотрение гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ вида

$$\mathfrak{H} \rightleftharpoons \overset{\circ}{W}{}_2^2[0,1] \tag{1.4}$$

в случае граничных условий (1.2), и

$$\mathfrak{H} \rightleftharpoons \{y \in W_2^2[0,1] \;:\; y(0) = y'(0) = y'(1) = 0\} \tag{1.5}$$

в случае граничных условий (1.3). Пространство $\mathfrak{H}$ естественным образом вложено в $L_2[0,1]$, что позволяет ввести в рассмотрение [**18**, Дополнение 1, § 2] оснащение

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow L_2[0,1] \hookrightarrow \mathfrak{H}^*,$$

где $\mathfrak{H}^*$ — сопряжённое к $\mathfrak{H}$ пространство полулинейных функционалов. Обозначим через $I : \mathfrak{H} \to L_2[0,1]$ и $I^* : L_2[0,1] \to \mathfrak{H}^*$ соответствующие операторы вложения, а через $J : \mathfrak{H}^* \to \mathfrak{H}$ — изометрию

$$(\forall y \in \mathfrak{H}^*)\,(\forall z \in \mathfrak{H}) \qquad \langle Jy, z\rangle_{\mathfrak{H}} = \langle y, z\rangle,$$

существование которой гарантируется теоремой Рисса [**19**, Гл. V, § 1] о представлении функционала в гильбертовом пространстве. Введём также в рассмотрение линейный пучок $T : \mathbb{C} \to \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^*)$, операторы которого действуют согласно правилу

$$\langle T(\lambda)y, z\rangle \rightleftharpoons \int_0^1 \left[p\, y''\overline{z''} - \lambda\,(y'\overline{z'} + cr\, y\overline{z})\right] dx - \lambda\alpha\, y(1)\overline{z(1)}. \tag{1.6}$$

Имеет место следующий простой факт (см., например, [**20**] и [**21**]):

Утверждение 1.1. *При любом выборе значения $\lambda \in \mathbb{C}$ ядро оператора $T(\lambda)$ в точности совпадает с множеством решений исходной граничной задачи* (1.1), (1.2) *или* (1.1), (1.3).

Доказательство. Установление факта принадлежности всякого решения y исходной задачи пространству $\mathfrak{H}$ и обращения при этом функционала $T(\lambda)y$ в тождественный

нуль не вызывает затруднений. Пусть теперь $y \in \mathfrak{H}$ и $T(\lambda)y = 0$. Введём в рассмотрение функцию

$$w \rightleftharpoons py'' + \lambda y - \lambda c \int\limits_0^x ry \cdot (x-t)\,dt.$$

Выводимое из (1.6) интегрированием по частям тождество

$$(\forall z \in \overset{\circ}{W}{}_2^2[0,1]) \qquad \int\limits_0^1 w\overline{z''}\,dx = 0$$

означает, что функция w является линейной. Последнее, в свою очередь, немедленно влечёт справедливость соотношений $y \in C^2[0,1]$, $py'' \in C^2[0,1]$ и равенства (1.1). Выполнение равенства

$$(py'')'(1) + \lambda\alpha y(1) = 0$$

в случае (1.5) проверяется интегрированием определения (1.6) по частям для $z \rightleftharpoons 2x^3 - 3x^2$. □

Утверждение 1.1 позволяет рассматривать пучок T в качестве адекватной операторной модели исходной граничной задачи, что и будет делаться нами в дальнейшем.

Утверждение 1.2. *Спектр пучка T является вещественным, дискретным и полупростым.*

Доказательство. Независимо от выбора значения $\lambda \in \mathbb{C}$ ограниченная обратимость оператора $T(\lambda)$ с очевидностью равносильна ограниченной обратимости оператора

$$JT(0) + \lambda\, J(dT/d\lambda) : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}.$$

При этом, как следует из представления (1.6), оператор $JT(0)$ является равномерно положительным, а оператор $J(dT/d\lambda)$ — самосопряжённым и вполне непрерывным. Соответственно, значение $\lambda = 0$ принадлежит резольвентному множеству пучка T, а произвольное $\lambda \neq 0$ попадает в его спектр в том и только том случае, когда λ^{-1} принадлежит спектру самосопряжённого вполне непрерывного оператора $R \rightleftharpoons -[JT(0)]^{-1/2}J(dT/d\lambda)[JT(0)]^{-1/2}$. Учёт того обстоятельства, что разрешимость уравнения

$$T(\lambda)y = (dT/d\lambda)z$$

для произвольно фиксированного вектора $z \in \ker T(\lambda)\backslash\{0\}$ приводила бы к существованию присоединённых векторов у самосопряжённого оператора R, завершает доказательство. □

1.4. Укажем на некоторые понятия и постановки задач, в том или ином смысле примыкающие к задаче о спектральных свойствах пучка T.

Во-первых, с пучком T могут быть связаны пучки замкнутых неограниченных операторов $T(\lambda)I^{-1}I^{*-1} : \mathfrak{H}^* \to \mathfrak{H}^*$ и $I^{*-1}T(\lambda)I^{-1} : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$. Из утверждения 1.1 легко выводится, что спектр этих пучков (понимаемый как множество значений параметра $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых значение пучка не имеет ограниченного обратного), в точности совпадает со спектром пучка T. Тем самым, указанные переформулировки не привносят в задачу дополнительного содержания.

Во-вторых, сделанный нами выбор трактовки задачи позволяет легко распространить получаемые результаты на ту существенно более общую ситуацию, когда коэффициент p представляет собой произвольную равномерно положительную функцию класса $L_\infty[0,1]$, а коэффициент r — произвольную знакоопределённую обобщённую функцию класса $W_2^{-1}[0,1]$. В настоящей статье, однако, мы не станем заниматься этой проблематикой.

1.5. Через $\operatorname{ind} L$ на всём протяжении статьи обозначается отрицательный индекс инерции квадратичной формы оператора L, то есть точная верхняя грань размерностей подпространств $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$, удовлетворяющих условию

$$(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall y \in \mathfrak{M}) \qquad \langle Ly, y\rangle \leqslant -\varepsilon\,\|y\|^2.$$

2. Модельная задача и допустимое множество

2.1. Имеют место следующие два факта, фигурирующие в работе **[11]** как лемма 2.1 и лемма 2.2, соответственно:

Утверждение 2.1. *Для любых равномерно положительных функций $p, r \in C[0,1]$ любое нетривиальное решение уравнения*

$$(py'')'' - ry = 0, \tag{2.1}$$

удовлетворяющее при некотором $a \in [0,1)$ условиям

$$y(a) \geqslant 0, \qquad y'(a) \geqslant 0, \qquad y''(a) \geqslant 0, \qquad (py'')'(a) \geqslant 0,$$

удовлетворяет также неравенствам

$$y(1) > 0, \qquad y'(1) > 0, \qquad y''(1) > 0, \qquad (py'')'(1) > 0.$$

Утверждение 2.2. *Для любых равномерно положительных функций $p, r \in C[0,1]$ любое нетривиальное решение уравнения* (2.1)*, удовлетворяющее при некотором $a \in (0,1]$ условиям*

$$y(a) \geqslant 0, \qquad y'(a) \leqslant 0, \qquad y''(a) \geqslant 0, \qquad (py'')'(a) \leqslant 0,$$

удовлетворяет также неравенствам

$$y(0) > 0, \qquad y'(0) < 0, \qquad y''(0) > 0, \qquad (py'')'(0) < 0.$$

2.2. Перед тем, как приступить непосредственно к исследованию свойств пучка T, рассмотрим вспомогательный линейный пучок $S : \mathbb{C} \to \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^*)$, отвечающий дифференциальному уравнению

$$(py'')'' - \lambda r y = 0 \tag{2.2}$$

и какому-либо из наборов граничных условий (1.2) или (1.3). Как и в случае с пучком T, значения пучка S предполагаются заданными посредством правила

$$\langle S(\lambda)y, z\rangle \rightleftharpoons \int_0^1 \left[p\,y''\overline{z''} - \lambda r y \overline{z}\right] dx - \lambda\alpha\, y(1)\overline{z(1)}. \tag{2.3}$$

Коэффициенты $p, r \in C[0,1]$ по-прежнему считаются равномерно положительными. Аналогично тому, как было сделано при доказательстве утверждения 1.1, может быть показано, что ядро оператора $S(\lambda)$ совпадает с пространством классических решений исходной граничной задачи для уравнения (2.2).

Утверждение 2.3. *Все положительные собственные значения пучка S и все расположенные на интервале $(0,1)$ нули его собственных функций, отвечающих положительным собственным значениям, являются простыми.*

Доказательство. Аналогично тому, как было сделано при доказательстве утверждения 1.2, может быть установлен факт вещественности, дискретности и полупростоты спектра пучка S. Пусть теперь $\lambda > 0$ — кратное собственное значение указанного пучка. В силу вышесказанного, пространство классических решений соответствующей граничной задачи для уравнения (2.2) оказывается тогда не менее, чем двумерным. Соответственно, внутри него должна найтись нетривиальная функция, удовлетворяющая условиям

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y'(1) = 0,$$

что противоречит утверждению 2.1.

Наконец, пусть $a \in (0,1)$ — кратный нуль собственной функции пучка S, отвечающей собственному значению $\lambda > 0$. Без ограничения общности при этом можно считать выполненным неравенство $y''(a) \geqslant 0$. Но тогда оказывается существующим нетривиальное решение уравнения (2.2), удовлетворяющее какому-либо из наборов условий

$$\begin{aligned} &y(a) = y'(a) = y'(1) = 0, \qquad && y''(a) \geqslant 0, \qquad && (py'')'(a) \geqslant 0,\\ &y(a) = y'(a) = y'(0) = 0, \qquad && y''(a) \geqslant 0, \qquad && (py'')'(a) \leqslant 0, \end{aligned}$$

что также противоречит утверждениям 2.1 и 2.2. □

Утверждение 2.4. *Пусть $\alpha \geqslant 0$. Тогда оператор $-[S(0)]^{-1}(dS/d\lambda) : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ не увеличивает числа перемен знака никакой вещественнозначной функции $f \in \mathfrak{H}$.*

Доказательство. Путём рассуждения, аналогичного проведённому при доказательстве утверждения 1.1, легко устанавливается, что решение уравнения $S(0)y = -(dS/d\lambda)f$ представляет собой классическое решение граничной задачи, отвечающей уравнению

$$(py'')'' = rf,$$

а также граничным условиям (1.2), если исходный пучок S отвечает тем же граничным условиям, и граничным условиям

$$y(0) = y'(0) = y'(1) = (py'')'(1) + \alpha f(1) = 0, \tag{2.4}$$

если исходный пучок S отвечает граничным условиям (1.3). Предположим, что функция y имеет на интервале $(0,1)$ не менее n перемен знака, то есть что найдутся $n+1$ точек

$$0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} < 1,$$

удовлетворяющих при каждом $k \in [1,n]$ неравенству $y(x_k)y(x_{k+1}) < 0$. Тогда будут справедливы следующие утверждения, последовательно устанавливаемые на основе теоремы Лагранжа о среднем значении:

(1) Функция y' имеет не менее $n+1$ перемен знака в случае (1.2), и не менее n перемен знака в случае (2.4).

(2) Функции y'' и py'' имеют не менее $n+2$ перемен знака в случае (1.2), и не менее $n+1$ перемен знака в случае (2.4).
(3) Функция $(py'')'$ имеет не менее $n+1$ перемен знака в случае (1.2), и не менее n перемен знака в случае (2.4).

В случае (1.2) функция $f=(py'')''/r$ потому заведомо имеет не менее n перемен знака. В случае же (2.4) найдутся $n+1$ точек

$$0<\xi_1<\ldots<\xi_{n+1}<1,$$

удовлетворяющих при каждом $k\in[1,n]$ неравенству $(py'')'(\xi_k)\cdot(py'')'(\xi_{k+1})<0$, а также n точек $\zeta_k\in(\xi_k,\xi_{k+1})$, удовлетворяющих при каждом $k\in[1,n]$ неравенству $(py'')'(\xi_k)\cdot f(\zeta_k)<0$. При этом, согласно (2.4), выполняется хотя бы одно из неравенств $(py'')'(\xi_{n+1})\cdot(py'')'(1)\leqslant 0$ или $(py'')'(\xi_{n+1})\cdot f(1)<0$, а потому найдётся точка $\zeta_{n+1}\in(\xi_{n+1},1)$ со свойством $(py'')'(\xi_{n+1})\cdot f(\zeta_{n+1})<0$. Тем самым, в случае (2.4) функция f также имеет не менее n перемен знака. □

Заметим, что в случае $\alpha\geqslant 0$ при любом $\lambda\leqslant 0$ заданная определением (2.3) квадратичная форма оператора $S(\lambda)$ является равномерно положительной на пространстве $\mathfrak{H}$. Соответственно, все собственные значения пучка S являются тогда положительными и подпадают под действие утверждения 2.3. Расположим спектр пучка S в возрастающую последовательность

$$0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n<\ldots$$

простых положительных собственных значений. Зафиксируем также некоторую последовательность $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ отвечающих собственным значениям λ_n нормированных (в пространстве $\mathfrak{H}$) вещественнозначных собственных функций. Поскольку оператор $[S(0)]^{-1}(dS/d\lambda)$ подобен самосопряжённому оператору $[JS(0)]^{-1/2}J(dS/d\lambda)[JS(0)]^{-1/2}$, функциональная последовательность $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ образует базис Рисса в замыкании области значений оператора $[S(0)]^{-1}(dS/d\lambda)$.

Утверждение 2.5. *Пусть $\alpha\geqslant 0$. Тогда каждая собственная функция y_n имеет в точности $n-1$ нулей на интервале* $(0,1)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную вещественнозначную функцию вида

$$f=\sum_{k=1}^{n}c_k y_k. \tag{2.5}$$

Функциональная последовательность $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ вида

$$f_m \rightleftharpoons \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right)^m c_k y_k$$

сходится в пространстве $C^2[0,1]$ к функции $c_n y_n$. При этом из утверждения 2.1 вытекает справедливость неравенства $y_n''(0)\neq 0$, а из утверждения 2.2 вытекает справедливость неравенства $y_n''(1)\neq 0$ в случае граничных условий (1.2), и неравенства $y_n(1)\neq 0$ в случае граничных условий (1.3). Из этих фактов и утверждения 2.3 следует, что при $m\gg 1$ функции f_m имеют в случае $c_n\neq 0$ в точности столько же перемен знака, сколько у собственной функции y_n. С учётом тождества

$$f=\lambda_n^m\bigl\{-[S(0)]^{-1}(dS/d\lambda)\bigr\}^m f_m$$

и утверждения 2.4 сказанное означает, что функция f вида (2.5) также имеет в указанном случае не большее число перемен знака.

Ввиду линейной независимости системы собственных функций пучка S, при любом $n \geqslant 1$ найдётся набор коэффициентов $\{c_k\}_{k=1}^n$, для которого соответствующая функция (2.5) будет иметь не менее $n-1$ перемен знака. При этом всегда можно добиться выполнения неравенства $c_n \neq 0$. Тогда, с учётом вышесказанного, функция y_n не может иметь менее $n-1$ перемен знака.

Рассмотрим теперь произвольную вещественнозначную функцию вида

$$f = \sum_{k=n}^{\infty} c_k y_k. \tag{2.6}$$

Функциональная последовательность $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ вида

$$f_m \rightleftharpoons \lambda_n^m \bigl\{-[S(0)]^{-1}(dS/d\lambda)\bigr\}^m f = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)^m c_k y_k$$

сходится в пространстве $\mathfrak{H}$ к функции $c_n y_n$. Соответственно, в случае $c_n \neq 0$ при $m \gg 1$ функции f_m не могут иметь меньшее число перемен знака, чем у собственной функции y_n. Согласно утверждению 2.4 это означает, что функция f вида (2.6) также имеет в указанном случае не меньшее число перемен знака.

Заметим теперь, что вложенная в пространство $\mathfrak{H}$ линейная оболочка набора многочленов $\{x^{k+2} \cdot (1-x)^2\}_{k=0}^{n-1}$ имеет размерность n и не содержит функций с более чем $n-1$ знакопеременами. Соответственно, среди всевозможных результатов действия оператора $[S(0)]^{-1}(dS/d\lambda)$ на указанные многочлены найдётся нетривиальная функция вида (2.6) с не превосходящим $n-1$ числом перемен знака. С учётом вышесказанного это означает существование номера $N \geqslant n$, отвечающая которому собственная функция y_N имеет не более $n-1$ перемен знака.

Объединяя полученные результаты, устанавливаем, что при любом $n \geqslant 1$ собственная функция y_n имеет в точности $n-1$ перемен знака на интервале $(0,1)$. Ввиду гарантированной утверждением 2.3 простоты нулей этой функции, последнее равносильно доказываемому утверждению. □

Утверждение 2.6. *Пусть* $\alpha \geqslant 0$. *Тогда для любой собственной пары* $\{\lambda, y\}$ *пучка* S *функция* y *имеет в точности* $\operatorname{ind} S(\lambda)$ *нулей на интервале* $(0,1)$.

Данное утверждение представляет собой тривиальное следствие предыдущего и известных вариационных принципов (см., например, [**15**, Proposition 6]).

2.3. Вернёмся теперь к рассмотрению исходного операторного пучка T. Назовём его *допустимым множеством* $\operatorname{Let}(p)$ множество таких значений параметра $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых квадратичная форма

$$\int_0^1 [p\,|y'|^2 - \lambda |y|^2]\,dx \tag{2.7}$$

равномерно положительна на $\overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]$. Это множество зависит только от выбора коэффициента p и представляет собой бесконечную влево открытую полупрямую, имеющую в

качестве своей правой границы наименьшее собственное значение задачи

$$-(py')' - \lambda y = 0, \tag{2.8}$$

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{2.9}$$

Нашей ближайшей целью является установление того факта, что при всяком $\lambda \in \mathrm{Let}(p)$ квадратичная форма оператора $T(\lambda)$ может быть посредством замены переменной превращена в квадратичную форму некоторого оператора рассмотренного выше модельного типа.

Как хорошо известно [**22**, Теорема 1.6.2], для каждого $\lambda \in \mathrm{Let}(p)$ можно зафиксировать равномерно положительное решение $\sigma \in C^1[0,1]$ дифференциального уравнения

$$-(p\sigma')' - \lambda\sigma = 0. \tag{2.10}$$

Замена параметра

$$t(x) \rightleftharpoons \frac{1}{\omega}\int\limits_0^x \sigma\, d\xi, \qquad \omega \rightleftharpoons \int\limits_0^1 \sigma\, d\xi$$

определяет при этом непрерывную биекцию $V : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$, сопоставляющую каждой функции $y \in \mathfrak{H}$ функцию $z \in \mathfrak{H}$ вида

$$\begin{aligned} z(x) &\equiv y(t(x)), \\ z'(x) &\equiv y'(t(x))\frac{\sigma(x)}{\omega}, \\ z''(x) &\equiv y''(t(x))\frac{\sigma^2(x)}{\omega^2} + y'(t(x))\frac{\sigma'(x)}{\omega}. \end{aligned}$$

Утверждение 2.7. *Оператор $\hat{T} \rightleftharpoons V^*T(\lambda)V$ удовлетворяет тождеству*

$$\langle \hat{T}y, z\rangle \equiv \int\limits_0^1 \left[\hat{p}y''\overline{z''} - \hat{r}y\overline{z}\right]\, dx - \lambda\alpha\, y(1)\overline{z(1)},$$

где функции $\hat{p}$ и $\hat{r}$ имеют вид

$$\hat{p}(t(x)) \equiv p(x)\frac{\sigma^3(x)}{\omega^3}, \tag{2.11}$$

$$\hat{r}(t(x)) \equiv \lambda c r(x)\frac{\omega}{\sigma(x)}. \tag{2.12}$$

Доказательство. Повторим почти дословно рассуждения из доказательства теоремы 2.1 работы [**23**]. А именно, заметим, что для любой функции $w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]$ выполняется равенство

$$\int\limits_0^1 [p\sigma'\overline{w'} - \lambda\sigma w]\, dx = 0.$$

Полагая $w \rightleftharpoons |z'|^2/\sigma$, $z \rightleftharpoons Vy$, получаем отсюда

$$\int\limits_0^1 \left[p\sigma'\left(\frac{|z'|^2}{\sigma}\right)' - \lambda\,|z'|^2\right]\, dx = 0.$$

С учётом непосредственно проверяемого тождества

$$|z''(x)|^2 - |y''(t(x))|^2 \, \frac{\sigma^4(x)}{\omega^4} \equiv \sigma'(x) \, \left(\frac{|z'|^2}{\sigma}\right)'(x)$$

устанавливаем теперь справедливость не зависящих от выбора функции $y \in \mathfrak{H}$ равенств

$$\begin{aligned}
\langle \hat{T} y, y\rangle &= \langle T(\lambda) z, z\rangle \\
&= \int_0^1 [p\,|z''|^2 - \lambda(|z'|^2 + cr\,|z|^2)]\,dx - \lambda\alpha\,|z(1)|^2 \\
&= \int_0^1 \hat{p}\,|y''|^2\,dt + \int_0^1 \left[p\sigma' \left(\frac{|z'|^2}{\sigma}\right)' - \lambda\,|z'|^2\right]\,dx - \int_0^1 \hat{r}\,|y|^2\,dt - \lambda\alpha\,|y(1)|^2 \\
&= \int_0^1 [\hat{p}\,|y''|^2 - \hat{r}\,|y|^2]\,dt - \lambda\alpha\,|y(1)|^2.
\end{aligned}$$

Ввиду принципа поляризации [**19**, Гл. I, (6.11)], это означает справедливость доказываемого утверждения. □

Утверждение 2.8. *Никакое число* $\lambda \in \mathrm{Let}(p)$ *не может одновременно являться собственным значением как пучка, отвечающего граничным условиям* (1.2)*, так и пучка, отвечающего граничным условиям* (1.3).

Доказательство. Предположим, что некоторая величина $\lambda \in \mathrm{Let}(p)$ удовлетворяет требованиям из формулировки доказываемого утверждения. Зафиксируем отвечающее ей равномерно положительное решение $\sigma \in C^1[0,1]$ уравнения (2.10), а также связанные с ним функции $\hat{p}$ и $\hat{r}$ вида (2.11), (2.12). Утверждение 2.7 означает, что функция $z \in C^2[0,1]$ принадлежит ядру оператора $T(\lambda)$, отвечающего случаю граничных условий (1.2), в том и только том случае, когда функция $y \in C^2[0,1]$ со свойством $z(x) \equiv y(t(x))$ является классическим решением граничной задачи, отвечающей уравнению

$$(\hat{p}y'')'' - \hat{r}y = 0 \tag{2.13}$$

и граничным условиям (1.2). Аналогичным образом, функция $z \in C^2[0,1]$ принадлежит ядру оператора $T(\lambda)$, отвечающего случаю граничных условий (1.3), в том и только том случае, когда функция $y \in C^2[0,1]$ со свойством $z(x) \equiv y(t(x))$ является классическим решением граничной задачи, отвечающей уравнению (2.13) и граничным условиям

$$y(0) = y'(0) = y'(1) = (\hat{p}y'')'(1) + \lambda\alpha y(1) = 0. \tag{2.14}$$

Предположение о нетривиальной разрешимости задачи (2.13), (1.2) означает равномерную положительность определённой соотношением (2.12) функции $\hat{r}$. Соответственно, предположение о существовании нетривиальной функции $y \in C^2[0,1]$, удовлетворяющей равенству (2.13) и каждому из наборов условий (1.2) и (2.14), противоречит утверждению 2.2. Иначе говоря, гипотеза из формулировки доказываемого утверждения могла бы выполняться лишь тогда, когда множество решений граничной задачи, отвечающей уравнению (2.13) и граничным условиям

$$y(0) = y'(0) = y'(1) = 0,$$

было бы не менее чем двумерно. Однако в таком случае любое решение уравнения (2.13) с начальными условиями $y(0) = y'(0) = 0$ должно было бы удовлетворять равенству $y'(1) = 0$, что противоречит утверждению 2.1. $\square$

Утверждение 2.9. *Любое собственное значение $\lambda \in \mathrm{Let}(p)$ пучка T имеет геометрическую кратность* 1.

Это утверждение немедленно вытекает из утверждения 2.8.

Утверждение 2.10. *Пусть $\lambda \in \mathrm{Let}(p)$ — собственное значение пучка T, удовлетворяющее условиям $\lambda c > 0$ и $\lambda\alpha \geqslant 0$. Тогда отвечающая ему собственная функция имеет в точности $\operatorname{ind} T(\lambda)$ простых нулей на интервале $(0, 1)$.*

Это утверждение немедленно вытекает из утверждений 2.7, 2.6 и очевидного факта сохранения числа и простоты нулей функции при действии оператора V.

3. Основные результаты

3.1. Ввиду вытекающей из представления (1.6) равномерной положительности квадратичной формы оператора $T(0)$, все положительные собственные значения пучка T имеют отрицательный тип, а все отрицательные — положительный. Как следует из предложения [**15**, Proposition 6], это означает справедливость следующего утверждения:

Утверждение 3.1. *Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность сосчитанных в порядке возрастания с учётом кратности положительных собственных значений пучка T, а $\{\lambda_{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность (возможно, частичная) сосчитанных в порядке убывания с учётом кратности отрицательных собственных значений того же пучка. Тогда при $\lambda \in [0, \lambda_n]$ и $\lambda \in [\lambda_{-n}, 0]$ выполняются неравенства $\operatorname{ind} T(\lambda) \leqslant n-1$, а при $\lambda \in (\lambda_n, +\infty)$ и $\lambda \in (-\infty, \lambda_{-n})$ — неравенства $\operatorname{ind} T(\lambda) \geqslant n$.*

3.2. Имеет место следующий факт:

Теорема 3.1. *При любом $n \geqslant 1$ выполняется соотношение $\lambda_{-n} \in \mathrm{Let}(p)$. В случае граничных условий (1.3) и выполнения неравенств $c > 0$ и $\alpha \geqslant 0$ выполняется также соотношение $\lambda_1 \in \mathrm{Let}(p)$.*

Доказательство. Принадлежность всех отрицательных собственных значений пучка T его допустимому множеству вытекает из тривиального факта положительности наименьшего собственного значения задачи (2.8), (2.9). Из утверждения 3.1 вытекает также факт неотрицательности квадратичной формы (1.6) при $\lambda = \lambda_1$. Поскольку в случае граничных условий (1.3) множество всевозможных производных y' функций $y \in \mathfrak{H}$ в точности совпадает с пространством $\overset{\circ}{W}{}_2^1[0, 1]$, сказанное означает положительность квадратичной формы (2.7) при $c > 0$, $\alpha \geqslant 0$ и $\lambda = \lambda_1$. $\square$

С учётом утверждения 3.1 и результатов предыдущего параграфа, простыми следствиями этого факта являются следующие три теоремы:

Теорема 3.2. *Все отрицательные собственные значения пучка T являются простыми.*

Теорема 3.3. *Пусть $c < 0$ и $\alpha \leqslant 0$. Тогда любая собственная функция пучка T, отвечающая его n-му отрицательному собственному значению λ_{-n}, имеет в точности $n - 1$ простых нулей на интервале $(0, 1)$.*

Теорема 3.4. *В случае граничных условий* (1.3) *и выполнения неравенств* $c > 0$ *и* $\alpha \geqslant 0$ *первое положительное собственное значение* λ_1 *пучка* T *является простым и имеет знакопостоянную на интервале* $(0,1)$ *собственную функцию.*

3.3. Имеет место следующий факт:

Теорема 3.5. *Число отрицательных собственных значений пучка* T *совпадает с числом отрицательных собственных значений граничной задачи*

$$-y'' + cry = \lambda y,$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

в случае граничных условий (1.2), *и граничной задачи*

$$-y'' + cry = \lambda y,$$
$$y(0) = y'(1) + \alpha y(1) = 0$$

в случае граничных условий (1.3).

Доказательство. Из утверждения 3.1 вытекает, что число отрицательных собственных значений пучка T совпадает с величиной $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} \operatorname{ind} T(\lambda)$. Последняя же, как следует из представления (1.6), равна отрицательному индексу инерции заданной на пространстве $\mathfrak{H}$ квадратичной формы

$$\int_0^1 \left[|y'|^2 + cr\,|y|^2\right] dx + \alpha\,|y(1)|^2.$$

Отсюда и из того факта, что пополнением пространства $\mathfrak{H}$ по норме пространства $W_2^1[0,1]$ является пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]$ в случае граничных условий (1.2) и пространство

$$\{y \in W_2^1[0,1] \;:\; y(0) = 0\}$$

в случае граничных условий (1.3), немедленно вытекает искомое. $\square$

3.4. На протяжении оставшейся части статьи через λ_n будут обозначаться собственные значения пучка, отвечающего граничным условиям (1.2), а через λ'_n — собственные значения пучка, отвечающего граничным условиям (1.3).

Теорема 3.6. *При любом* $n \in \mathbb{N}$, *для которого определены собственные значения* λ_{-n} *и* λ'_{-n}, *выполняется неравенство* $\lambda_{-n} < \lambda'_{-n}$. *При любом* $n \in \mathbb{N}$, *для которого определены собственные значения* λ_{-n} *и* λ'_{-n-1}, *выполняется неравенство* $\lambda'_{-n-1} < \lambda_{-n}$. *В случае выполнения неравенств* $c > 0$ *и* $\alpha \geqslant 0$ *выполняется также неравенство* $\lambda'_1 < \lambda_1$.

Доказательство. Согласно утверждению 3.1, для любой точки $\lambda < \lambda_{-n}$ квадратичная форма (1.6) отрицательна на некотором n-мерном подпространстве пространства (1.4). Тогда она отрицательна и на некотором n-мерном подпространстве более широкого пространства (1.5), что означает выполнение неравенства $\lambda < \lambda'_{-n}$. Ввиду произвольности выбора точки λ, сказанное означает выполнение неравенства $\lambda_{-n} \leqslant \lambda'_{-n}$. Аналогичным образом устанавливается справедливость неравенства $\lambda'_1 \leqslant \lambda_1$.

Далее, для любой точки $\lambda < \lambda'_{-n-1}$ квадратичная форма (1.6) отрицательна на некотором $(n+1)$-мерном подпространстве пространства (1.5). Поскольку пространство (1.4)

имеет в (1.5) коразмерность 1, то квадратичная форма (1.6) отрицательна на некотором n-мерном подпространстве пространства (1.5), что означает выполнение неравенства $\lambda < \lambda_{-n}$. Ввиду произвольности выбора точки λ, сказанное означает выполнение неравенства $\lambda'_{-n-1} \leqslant \lambda_{-n}$.

Для завершения доказательства остаётся обратиться к теореме 3.1 и утверждению 2.8. $\square$

Список литературы

[1] G. Heisecke. *Rand-Eigenwertprobleme $N(y) = \lambda P(y)$ bei λ-abhangingen Randbedingungen*// Mitt. Math. Sem. Giessen. — 1980. — V. 145. — P. 1–74.

[2] C. Gheorgiu, I. S. Pop. *A modified Chebyshev-tau method for a hydrodynamic stability problem*// Proceedings of the International Conference on Approximization and Optimization, Romania-ICAOR. — 1997. — V. 2. — P. 119–126.

[3] L. Collatz. *Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung.* New-York, Chelsea, 1948.

[4] R. G. Drazin, W. H. Reid. *Hydrodynamic Stability.* Cambridge Univ. Press, 1981.

[5] А. А. Шкаликов. *Как определить оператор Орра–Зоммерфельда?*// Вестник МГУ, Серия 1: Математика, механика. — 1998. — № 4, С. 36–43.

[6] C. C. Lin. *The Theory of Hydrodynamic Stability.* Cambridge Univ. Press, 1955.

[7] A. A. Shkalikov, C. Tretter. *Kamke problems: Properties of the eigenfunctions*// Math. Nachr. — 1994. — V. 170. — P. 251–275.

[8] A. A. Shkalikov, C. Tretter. *Spectral analysis for linear pencils $N - \lambda P$ of ordinary differential operators*// Math. Nachr. — 1996. — V. 179. — P. 275–305.

[9] R. Mennicken, M. Moller. *Nonselfadjoint Boundary Eigenvalue Problems.* Amsterdam, Elsevier, North-Holland, 2003.

[10] Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн. *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем.* М: ГИТТЛ, 1950.

[11] W. Leighton, Z. Nehari. *On the oscillation of solutions of self-adjoint linear differential equations of the fourth order*// Trans. of AMS. — 1958. — V. 89. — P. 325-377.

[12] А. Ю. Левин, Г. Д. Степанов. *Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака*// Сиб. мат. журнал. — 1976. — Т. 17, №№ 3–4. — С. 606–625; 813–830.

[13] D. Banks, G. Kurowski. *A Prüfer transformation for the equation of vibrating beam subject to axial forces*// Jour. Diff. Eq. — 1977. — V. 24. — P. 57–74.

[14] U. Elias. *Eigenvalue Problems for the Equation $Ly = \lambda\rho(x)y = 0$*// Jour. Diff. Eq. — 1978. — V. 29. — P. 28–57.

[15] P. Lancaster, A. Shkalikov, Qiang Ye. *Strongly definitizable linear pencils in Hilbert space*// Integr. Equat. Oper. Th. — 1993. — V. 17. — P. 338–360.

[16] А. В. Боровских, Ю. В. Покорный. *Системы Чебышёва–Хаара в теории разрывных ядер Келлога*// Успехи матем. наук. — 1994. — Т. 49, № 3. — С. 3–42.

[17] А. А. Владимиров. *К осцилляционной теории задачи Штурма–Лиувилля с сингулярными коэффициентами*// Журнал выч. матем. и матем. физики. — 2009. — Т. 49, № 9. — С. 1609–1621.

[18] Ф. А. Березин, М. А. Шубин. *Уравнение Шредингера.* М: Изд-во МГУ, 1983.

[19] Т. Като. *Теория возмущений линейных операторов.* М: Мир, 1972.

[20] М. И. Нейман-заде, А. А. Шкаликов. *Операторы Шрёдингера с сингулярными потенциалами из пространств мультипликаторов*// Матем. заметки. — 1999. — Т. 66, № 5. — С. 723–733.

[21] А. А. Владимиров. *О сходимости последовательностей обыкновенных дифференциальных операторов*// Матем. заметки. — 2004. — Т. 75, № 6. — С. 941–943.

[22] Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. *Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах.* М: Физматлит, 2009.

[23] Ж. Бен Амара, А. А. Владимиров. *Об осцилляции собственных функций задачи четвёртого порядка со спектральным параметром в граничном условии*// Фунд. и прикл. матем. — 2006. — Т. 12, № 4. — С. 41–52.